پاسخنامهٔ تشریحی

آزمون ۷ ریاضی (۱۴۰۲_۱۴۰۱)

۱ـ گزینهٔ (۳)

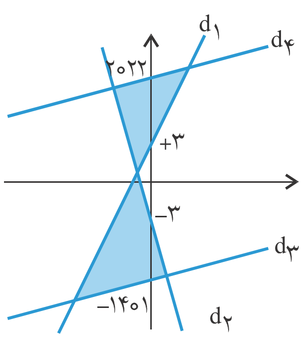
حل: $-۲^{۱۰۰} < ۲^{(۳^۴)} = ۲^{۸۱} < ۶۴^{۱۴} = ۲^{۸۴} < (-\frac{۱}{۸})^{-۳۰} = +۲^{۹۰}$

۲ـ گزینهٔ (۴)

حل: می‌دانیم $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(C)$ هر کدام یک عدد طبیعی هستند. بنابراین مجموعهٔ $\{n(A),n(B),n(C)\}$ حداقل شامل یک عضو (در صورتی که $n(A)=n(B)=n(C)$) و حداکثر شامل ۳ عضو (در صورتی که $n(A) \neq n(B) \neq n(C)$) می‌باشد.

۳ـ گزینهٔ (۲)

حل: دو خط $d_۳ : y = ۳x - ۱۴۰۱$ و $d_۴ : y = ۳x + ۲۰۲۲$ شیب‌های یکسان دارند و با هم موازی‌اند؛ بقیهٔ خطوط دو به دو با هم متقاطع‌اند. خطوط را به‌صورت تقریبی در دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم؛ همانطور که مشاهده می‌کنید دو مثلث از تقاطع این ۴ خط ایجاد می‌شود.



۴ـ گزینهٔ (۲)

حل: می‌دانیم که در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، مجموع درجهٔ مقسوم‌علیه و درجهٔ خارج‌قسمت برابر با درجهٔ مقسوم و همواره درجهٔ باقیمانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کوچک‌تر است.

۵ـ گزینهٔ (۱)

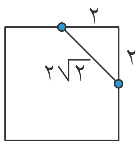
حل: نادرستی گزاره‌های $\overline{\overline{(A-B)}} = \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$ و $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{(A \cup B)}}$ با یک مثال نقض ثابت می‌شود:

$$\begin{matrix} A = \{۳\} \\ B = \{۵\} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{A}} = ۳ \ , \ \overline{\overline{B}} = ۵ \ , \ A - B = \{۳\} \ , \ A \cup B = \{۳ , ۵\} \\ \overline{\overline{A-B}} = ۳ \ , \ \overline{\overline{A \cup B}} = ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{A-B}} = \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}} & ۳ = ۳ - ۵ \ \times \\ \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A \cup B}} & ۳ + ۵ \leq ۵ \ \times \end{cases}$$

گزارهٔ $\overline{\overline{A-B}} \leq \overline{\overline{A}}$ همواره درست است؛ زیرا $A - B \subseteq A$ ، بنابراین $\overline{\overline{A-B}}$ یکی از اعضای مجموعهٔ A خواهد بود و طبق فرض سؤال همهٔ اعضای مجموعهٔ A کوچک‌تر یا مساوی $\overline{\overline{A}}$ هستند.

۶- گزینهٔ (۱)

حل: جسم باقیمانده شامل ۶ وجه مربعی و ۸ وجه مثلثی (متساوی‌الاضلاع) است که طول اضلاع آنها برابر با $۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲^۲+۲^۲})$ است. بنابراین مساحت هر مربع $۸=(۲\sqrt{۲})^۲$ و مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع $۲\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۲\sqrt{۲})^۲$ خواهند بود و داریم:



$$\text{مساحت جسم باقیمانده}=۶\times۸+۸\times۲\sqrt{۳}=۱۶(۳+\sqrt{۳})$$

تذکر: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

۷- گزینهٔ (۳)

حل: اگر کوچک‌ترین شمارندهٔ اول عدد a، ۲ باشد، مقدار $a*$ برابر با $\frac{a}{۲}$ پیشینه خواهد بود. اگر کوچک‌ترین شمارندهٔ اول $a*$ (یعنی $\frac{a}{۲}$) هم عدد ۲ باشد، مقدار $a**$ (یعنی $\frac{a}{۴}$) بیشینه می‌شود و همین‌طور الی آخر.

پس اگر بزرگ‌ترین عدد هشت رقمی مضرب $۱۶(=۲^۴)$ را به عنوان عدد a در نظر بگیریم، آنگاه $(\frac{a}{۱۶}=)a****$ بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت. حاصل تقسیم بزرگ‌ترین عدد هشت رقمی مضرب ۱۶ بر ۱۶، حداکثر ۷ رقمی خواهد بود. (بزرگ‌ترین عدد هشت رقمی مضرب ۱۶، حتماً از ۱۶۰۰۰۰۰۰ بزرگ‌تر است، پس $\frac{۱}{۱۶}$ آن حتماً از ۱۰۰۰۰۰۰ بزرگ‌تر، از طرفی چون ۱۶ از ده بزرگ‌تر است، پس حتماً حاصل تقسیم یک عدد هشت رقمی بر آن، حداکثر ۷ رقمی خواهد بود.)

۸- گزینهٔ (۲)

حل: با توجه به روابط زیر، گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند درست باشند.

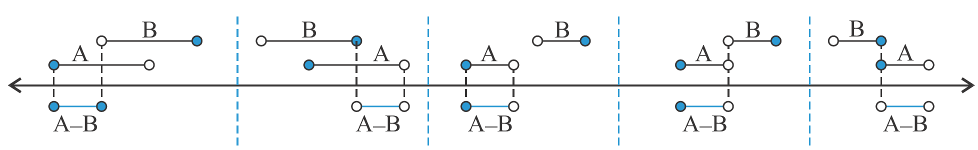
$$+\begin{array}{r} c<d \\ a<b \\ \hline c+a<d+b \end{array}\qquad +\begin{array}{r} c<d \\ -b<-a \\ \hline c-b<d-a \end{array}\qquad +\begin{array}{r} a<b \\ -d<-c \\ \hline a-d<b-c \end{array}$$

حال با یک مثال نشان می‌دهیم، گزینهٔ (۲) می‌تواند درست باشد:

$$\begin{array}{lll} c<d & a<b & b\times d<a\times c \\ -۳<۱ & -۲<۲ \rightarrow & ۲\times۱<-۲\times-۳ \ \checkmark \end{array}$$

۹- گزینهٔ (۳)

حل: در حالات زیر، مجموعهٔ $A-B$ به‌صورت پیوسته و غیرتهی خواهد بود. همان‌طور که مشخص است نمایش مجموعهٔ $A-B$ در هیچ‌یک از حالات، مطابق شکل گزینهٔ (۳) نیست.



۱۰- گزینهٔ (۴)

حل: روی خط $y = \pi$ هیچ نقطهٔ زردی قرار ندارد. روی خط $y = x$ بی‌شمار نقطهٔ زرد وجود دارد. روی خط $y = \pi x$ فقط یک نقطهٔ زرد (مبدأ مختصات) وجود دارد. اما هیچ خطی وجود ندارد که تنها دو نقطهٔ زرد روی آن باشد؛ زیرا اگر دو نقطهٔ زرد روی خطی باشند، نقطهٔ وسط آنها هم که روی همان خط قرار دارد، زرد خواهد بود (طول و عرض نقطهٔ وسط یک پاره‌خط به ترتیب میانگین طول‌ها و عرض‌های نقاط دو سر پاره‌خط هستند. بنابراین اگر طول و عرض نقاط دو سر پاره‌خط گویا باشند، طول و عرض نقطهٔ وسط آنها هم گویا است.).

یادداشت‌های من

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون ۸ ریاضی (۱۴۰۳ - ۱۴۰۲)

۱- گزینهٔ (۲)

حل: در هر چندجمله‌ای اگر به جای متغیرها عدد «۱» را قرار دهید؛ حاصل، مجموع ضرایب چندجمله‌ای خواهد بود. می‌دانیم که عبارت داده شده نیز پس از به توان رساندن به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود، پس برای به دست آوردن مجموع ضرایب آن کافیست به جای متغیر x عدد «۱» را قرار دهید: $(۱۴۰۲(۱)^۳ - ۱۴۰۱)^۴ = ۱$

۲- گزینهٔ (۴)

حل: مختصات نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را در معادلهٔ خط داده شده جایگزین می‌کنیم تا مقدار k به دست آید:

$$(k+۱)۲ - (\frac{k}{۲})۱ = ۲k \rightarrow k = ۴$$

با جایگذاری مقدار k، معادلهٔ خط به‌صورت $۵x - ۲y = ۸$ درمی‌آید. حالا با جایگذاری طول نقاط گزینه‌ها در معادلهٔ خط، عرض نقطه روی خط با طول داده شده را به دست می‌آوریم؛ اگر عرض به دست آمده از عرض نقطهٔ گزینه کمتر باشد، نقطه بالای خط قرار دارد و بالعکس.

۳- گزینهٔ (۲)

حل: دو عبارت $A = -(-A)$ و $A \cap (-A) = \phi$ صحیح هستند و شکل صحیح دو عبارت دیگر به‌صورت زیر است:
$-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$ و $A \cup (-A) = Z$

۴- گزینهٔ (۳)

حل: می‌دانیم طول دو مماسی که از یک نقطه خارج از دایره بر دایره رسم می‌شوند با هم برابر است، پس داریم:

$$CD = CE = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲ \text{ و } BF = BD = ۹ \text{ ، } AE = AF = ۷ \rightarrow$$

$$P_{ABC} = ۲(۷ + ۹ + ۱۲) = ۵۶$$ (محیط مثلث ABC)

۵- گزینهٔ (۱)

حل: کوچک‌ترین عامل اول ۶۰۰۳ عدد «۳» است، یعنی در غربال اراتستن به عنوان مضرب ۳ خط می‌خورد. می‌دانیم در غربال اراتستن اول عدد «۱» خط می‌خورد، در مرحلهٔ بعد اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ و پس از آن مضارب فرد عدد ۳ (به‌جز خود ۳) خط می‌خورند (دقت کنید که مضارب زوج ۳ در مرحلهٔ قبل خط خورده‌اند). پس برای اینکه بدانیم عدد ۶۰۰۳ چندمین عددی است که خط می‌خورد باید حاصل عبارت زیر را به دست آوریم:

$$n\{۱\}+n\{۴\,,۶\,,۸\,,\dots,۱۰۰۰۰\}+n\{۹\,,۱۵\,,۲۱\,,\dots,۶۰۰۳\}=۱+\frac{۱۰۰۰۰-۲}{۲}+\frac{۶۰۰۳-۳}{۶}=$$
$$۱+۴۹۹۹+۱۰۰۰=۶۰۰۰$$

۶- گزینهٔ (۳)

حل:
$$\frac{\sqrt[۳]{۲۷(x-۲)^{۲}}\times\sqrt{(x-۲)^{-۱}}}{\sqrt[۳]{(x-۲)^{-۱}}\times(-۳^{۲})}=\frac{\sqrt[۳]{۲۷}\times(x-۲)^{\frac{۲}{۳}}\times(x-۲)^{\frac{-۱}{۲}}}{(x-۲)^{\frac{-۱}{۳}}\times(-۹)}=\frac{۳}{-۹}\times(x-۲)^{\frac{۲}{۳}+\frac{-۱}{۲}-(\frac{-۱}{۳})}=$$
$$-\frac{(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}}{۳}=-\frac{\sqrt{(x-۲)}}{۳}$$

۷- گزینهٔ (؟)

عدد گزینهٔ (۱) کوچک‌تر از $۲^{۱۴۰۱}$ است: $۲^{۱۳۹۰}\times۷۰۱=۲^{۱۴۰۱}\times\frac{۷۰۱}{۲^{۱۱}}=۲^{۱۴۰۱}\times(\frac{۷۰۱}{۲۰۴۸})<۲^{۱۴۰۱}$

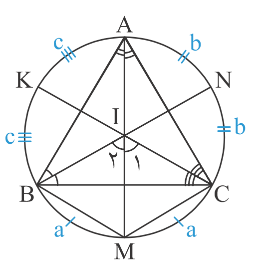
عدد گزینهٔ (۴) بزرگ‌تر از $۲^{۱۴۰۲}$ است: $۲^{۱۴۰۰}\times۱۴۰۲=۲^{۱۴۰۲}\times\frac{۱۴۰۲}{۲^{۲}}=۲^{۱۴۰۲}\times(\frac{۱۴۰۲}{۴})>۲^{۱۴۰۲}$

اعداد گزینه‌های (۲) و (۳) بین دو عدد داده شده قرار دارند ولی هیچ‌کدام بر ۲۸۰۴ بخش‌پذیر نیستند:

$$۲^{۱۴۰۱}<(۲^{۱۴۰۰}+۲^{۱۴۰۱})<۲^{۱۴۰۱}+۲^{۱۴۰۱}=۲^{۱۴۰۱}\times۲=۲^{۱۴۰۲}$$
$$۲^{۱۴۰۱}<(۲^{۱۳۹۶}\times۳۵)=۲^{۱۴۰۱}\times\frac{۳۵}{۲^{۵}}=۲^{۱۴۰۱}\times(\frac{۳۵}{۳۲})<۲^{۱۴۰۱}\times۲=۲^{۱۴۰۲}$$

۸- گزینهٔ (۴)

حل: می‌دانیم کمان‌های روبه‌روی زوایای محاطی برابر در یک دایره با هم برابرند؛ بنابراین مطابق شکل کمان‌هایی را که روبه‌روی زوایای محاطی برابر قرار دارند با حروف یکسان نام‌گذاری می‌کنیم. در مثلث IMC دو زاویهٔ $\hat{I}_۱$ و $\hat{C}$ و در مثلث IMB دو زاویهٔ $\hat{I}_۲$ و $\hat{B}$ با هم برابرند؛ زیرا:



$$\angle I_۱=\frac{\widehat{MC}+\widehat{KA}}{۲}=\frac{a+c}{۲}\quad و\quad \angle C=\frac{\widehat{MB}+\widehat{KB}}{۲}=\frac{a+c}{۲}$$
$$\angle I_۲=\frac{\widehat{MB}+\widehat{NA}}{۲}=\frac{a+b}{۲}\quad و\quad \angle B=\frac{\widehat{MC}+\widehat{CN}}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$

در نتیجه مثلث‌های IMB و IMC متساوی‌الساقین هستند و $MC=MI=MB$.

۹- گزینهٔ (۱)

راه حل اول:

$$(۹۹۹۹۹۹)^{۲}=(۱۰^{۶}-۱)^{۲}=۱۰^{۱۲}+۱-۲\times۱۰^{۶}=۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱-۲۰۰۰۰۰۰=۹۹۹۹۹۸۰۰۰۰۰۱$$

مجموع ارقام این عدد ۵۴ است: $۵\times۹+۸+۱=۵۴$

راه حل دوم: عدد $۹۹۹۹۹۹^{۲}$ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس مجموع ارقام این عدد توان‌دار نیز باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. تنها گزینهٔ بخش‌پذیر بر ۹ گزینهٔ یک است.

۱۰- گزینهٔ (۳)

حل:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2=10^2 \rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2\left(\overbrace{\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}+\frac{x}{y}\times\frac{z}{x}+\frac{y}{z}\times\frac{z}{x}}^{\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=11}\right)=100 \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=100-22=78$$